



Takana on pitkä ura matematiikan teorioiden keskellä. "Sitä kai professori Hirvonen tarkoitti, kun hän lupasi teekkareille tasoituslaskun antavan nälkäisen mahan mutta hyvät hampaat." Urho virnuilee purensa yli 40 vuotta pettuleipää saalistaessaan "ihan viimeisintä" teoriaa kolmen maan kautta – ja löytyihän se.

Haastattelu ja kuvat:  
Pekka Lehtonen

# Urho Rauhala

## maailmantason matemaatikko

Urho Rauhala työskentelee San Diegossa yrityksessä, joka tekee kaupallista tutkimustyötä sekä tutkimusta Yhdysvaltain puolustusvoimille. Käytännön sovellukset ovat salaisia – niistä ei ulkopuolisille paljoa hiiskuta. Rauhalalta on juuri ilmestynyt julkaisu uudesta matematiikan ja tasoituslaskun teoriasta. Siinä hän kuvaa yli 30-vuotista keksintöjensä sarjaa, joka uudistaa matematiikkaa ja insinööritieteiden perusteita.

Urho on kotoisin Ilmajoelta, Jaakko Ilkan jälkeläisiä 12. sukupolvessa, juniorien ja oppikoulujen Suomen pesäpallomestari, **Jussi Kiikerin** oppilaita. Kiinnostus tähtitieteeseen toi hänet maanmittausosastolle. Opinnot alkoivat v. 1963. Diplomityössään Urho pohti, kuinka yhdistetään geodesia ja fotogrammetria yhteistasoitukseen kuvakolmioiden nissa. Nämä ideat syntyivät Espoon kaupunkimittausosastolla harjoittelijana. Ensimmäisen käytännön sovellutuksen hän junaili vuonna 1968 **Hirvosen** kolmiointimenetelmälle Kehätien tietoisuudessa Helsingin maanmittauspiirissä.

### Array-algebran keksijä ja sovellutusten uranuurtaja

Valmistumisen jälkeen Urhosta tuli **R.S. Halosen** välityksellä fotogrammetrian professori **Hallertin** tutkimusassistentti Kuninkaalliseen Teknilliseen korkeakou-

luun Tukholmaan. Siellä hän laati lisen-siaattityötä fotogrammetrian ja geodesian yhteistasoituksesta. Kalibroidessaan Hasselbladın kuukameran kuvia Urho keksi yhteyden 2-ulotteisen interpolaa-tion ja polynomitasoituksen välillä. Tämä oli vielä helposti laajennettavissa kolmeen ja useampaan ulottuvuuteen.

Matriisilaskusta Urho muistelee professori Hirvosen vertausta: "Matriisi on kuin sotajoukko. Kun sille antaa komennon, kaikki alkiot tottelevat tarkoin ohjelmoituja sääntöjä." Urho kehitti matriiseihin kolmannen ulottuvuuden ja useammankin, jolloin ei puhutakaan matriiseista vaan tensoreista. "Array" on yleisempi nimitys operaattoreille, joilla voi ilmaista myös moniulotteisia havaintoyhtälöitä ja niiden pienimpään neliöiden käänteis- eli ratkaisuyhtälöitä. Tämä tapahtuu yleistämällä Einsteinin summasääntöä. Kesällä 1971 professori Hallert kuoli ja vanhan järjestelmän tekn.lis-

tutkinnon suorittamiseen oli aikaa vain muutama kuukausi. Onneksi saatiin jatkoaikaa. Urho suoritti lisensiaattityönsä keväällä 1972 aiheena array-algebra. Aiheesta ei kukaan ruotsalainen eikä muukaan fotogrammetrikko, geodeetti tai matemaatikko ollut kuullut eikä tajunutkaan juuri mitään.

Tämän jälkeen alkoi samanlainen ”ri-maa hipoen” -kilpa teknologie doktor -arvon saavuttamiseksi.

Materiaalista ei ollut pulaa, koska array-algebra tarjosi täysin uuden pohjan sovelletulle matematiikalle ja tasoituslaskulle. Se yhdisti estimaatioteorian, matemaattisen mallin suunnittelun ja signaalin käsittelyn uusiin käytännön fotogrammetrian ja geodesian sovellutuksiin kuten esimerkiksi uraauurtavaan itsekalibroivaan kolmiointiin. Tensoreiden avulla Einstein ja muut fyysikot olivat tehneet koordinaattimuunnoksia moniulotteisessa avaruudessa. Urho keksi joutuisan ja yleisen ratkaisutavan tensorien ja matriisien kertolaskulle: ei käännetty suurta matriisia vaan monta pientä. Laskutoimitusten määrä väheni usein tuhat-, jopa miljoonakertaisesti. Tämä avasi täysin uusia ratkaisumalleja, joista ei voi muuten edes kuvitella. Array-algebran ratkaisukaavat voidaan ohjelmoida pienille ja halvoille tietokoneille. Laskentaan kuluu aikaa vain muutama sekunti. Vanhalla menetelmällä se oli vienyt nopeimmiltakin supertietokoneilta päiviä tai viikkoja. Tämä nopea laskutapa on jatkoa maanmittarien tasoituslas-

kuun, jossa Hirvonen, Boltz, Hallert, Helmert, Gauss ja muut laskivat päässään kynää ja paperia käyttäen satojen tuntemattomien yhtälöitä. ”Matemaatikot eivät vielä siihen aikaan pystyneet kääntämään 5x5 isompaa matriisia eivätkä osanneet yhdistää virheanalyysia tasoitetuille suureille, minkä teekkarit oppivat Hirvosen, Halosen ja Tikan kursseilla”, kertoo Urho.

### Pitkä tie vierailta mailla

Takana on pitkä ura matematiikan teorioiden keskellä. ”Sitä kai professori Hirvonen tarkoitti, kun hän lupasi teekkarille tasoituslaskun antavan nälkäisen mahan mutta hyvät hampaat.” Urho virnuilee purensa yli 40 vuotta pettuleipää saalistaessaan ”ihan viimeisintä” teoriaa kolmen maan kautta – ja löytyihän se.

Väitöskirjassaan v. 1974 Urho laajensi Ruotsin (KTH) geodesian professori **Bjerhammarin** matriisin kääntöteoriaa. Hän sovelsi array-algebran estimointiteoriaa yhtälöryhmiin, joilla on ääretön määrä ratkaisuja. Tulokset esitettiin Amerikan fotogrammetrisen seuran kokouksessa. Tuloksesta kiinnostui amerikkalainen fotogrammetrian uranuurtaja **Duane Brown**. Hän lasketti tutkimusapulaisiltaan Urhon esimerkin ja sai muita menetelmiä paljon tarkemman tuloksen ja 200 kertaa nopeammin. Muunnoksia saattoi laskea jopa miljoonakertaisella nopeudella aikaisempiin malleihin verrattuna.

”Näillä sovellutuksilla on käyttöä digitaalisten maastomallien käsittelyssä ja automaattisessa kartanteossa: jokainen pikseli voidaan mitata ja yhdellä stereokuvaparilla saattaa olla jopa miljardeja havaintoja”, sanoo Urho.

Duane Brown alkoi vakuuttaa Urhon teorioista ja kutsui tämän yritykseensä, DBA Systems Inc.:iin, Floridaan. Alkoi Amerikan kierros. Brown teki tutkimuksia pääasiassa USA:n puolustusvoimille mutta yrityksessä oli myös pieni kaupallinen osasto, jossa Urho ulkomaalaisena saattoi työskennellä. Tällä osastolla kehitettiin fotogrammetriaa mm. lentokone- ja avaruusteollisuuden tarpeisiin. Floridassa kului 9 vuotta osin tutkimustyössä, osin kaupallisten sovellutusten kehittämisessä.

### Omassa yrityksessä kartta-alan sovellutuksia

Urho perusti oman yrityksen, joka kehitti mm. ohjelmistoja ensimmäisille kaupallisille inertia-paikanmääritysjärjestelmille. Hän kertoo tutustuneensa samoihin aikoihin suomalaissyntyiseen, tunnettuun fotogrammetrikkoon **Uki Helavaan**, joka oli ensimmäisiä tietokoneen käyttäjiä kartanteossa. Helava kehitti mm. analyyttisen plotterin. Hänellä oli yhteyksiä myös rahoittajiin. Helavan ja Rauhalan konsulttiyritykset olivat avainasemissa suuressa projektissa, jossa kehitettiin mm. ensimmäinen digitaalinen kartoituskoje. Yritykset myytiin ja veljet



**Urho kehitti matriiseihin kolmannen ulottuvuuden ja useammankin, jolloin ei puhutakaan matriiseista vaan tensoreista. ”Array” on yleisempi nimitys operaattoreille, joilla voi ilmaista myös moniulotteisia havaintoyhtälöitä ja niiden pienimpään neliöiden käänteis- eli ratkaisuyhtälöitä.**

muuttivat San Diegoon, Kaliforniaan. ”Ensimmäinen koje tarvitsi vielä ihmistä virheiden tarkistukseen. Ihmisellä on kaksi silmää, tietokoneella silmiä voi olla yli kymmenen. Array-algebra automaation aivoina tuotetaan virheettömämpää tietoa – ja 100 000 kertaa nopeammin,” Urho selittää.

### Kukaan ei ymmärtänyt Urhon matematiikkaa

Vuosina 1995 ja 1999 Urho kutsuttiin Amerikan käytännön matematiikkaa harjoittavien liiton SIAM:n (*Society of Industrial and Applied Mathematics*) seminaareihin esitelmöimään lineaarisesta array-algebrasta ja sen viimeisimmistä laajennuksista. Näitä hän oli esittänyt jo vuonna 1990 ja 1992 fotogrammetrian kokouksissa. Kesti kuitenkin yli 7 vuotta, että Urho sai julkaistuksi SIAMissa esittämänsä paperin. Nimittäin kukaan matemaatikko ei heti kyennyt sanomaan, onko teoria oikein vai väärin. Urholla oli tukenaan maailmankuulu tensori- eli geometrisen geodesian huippuututkija, tohtori **Georges (Yrjö) Blaha**, joka oli lähin työ- ja tenniskaveri Floridan ajoilta. Yrjö laski Urhon kaavat omalla

tensorimenetelmällään ja sai samat tulokset. Molemmat teoriat olivat kuitenkin outoja matemaatikoille. Vihdoin löytyi toimittaja ja nimettömänä esiintynyt asiantuntija, jotka hyväksyivät paperit julkaistaviksi. He esittivät, kuinka esitystä voisi yksinkertaistaa ja paperit ilmestyivät SIAMin verkkosivulle <http://epubs.siam.org> äskettäin SIMAXin julkaisusarjassa.

### Perhe on tärkein Urho-paapalle

Perhe on viettänyt ulkomailla yli kolme vuosikymmentä. Tyttäret, Minna ja Maria, syntyivät molemmat Suomessa mutta ovat tietysti kansainvälistyneet. Suomen kieli, kulttuuri, suku ja ystävät ovat aina olleet perheelle tärkeitä. Rauhalat ovat työskennelleet suomalaisuuden hyväksi San Diegon Balboa-puistossa sijaitsevan Suomi-talon kautta, jonka suojissa toimii vireä Suomi-seura. Urhon suurin ilonaihe viime vuosina onkin Marialle syntynyt Anna-tytär, jonka ensimmäinen sana oli selvällä suomenkielellä ”paap-p-pa”! Tosin se Taina-mummun hoivauksen vuoksi on nykyään muuttumassa muotoon ”mummu, paappa”.



**Urho Rauhala perheineen on viettänyt ulkomailla yli kolme vuosikymmentä. San Diegossa suomalaisten yhdysside on Suomi-talo. Suomi-talo on suomalaisuuden vaalimisen vahva linnake, vakuuttaa seuran puheenjohtaja Bernhard A. Maki.**

## Array-algebra, mitä se on?

Urho Rauhalan lineaarinen array-algebra laajensi matriisilaskennan tensoreihin ja yleisiin kääntematriiseihin ”lyhyen Einsteinin kaavan” mukaan. Tuntemattomat suureet ja havaintoarvot ”pantiin uusjakoon” eli tavanomaisesta sarake- (vektori-) muodosta 3-D ja useampi-ulotteisiin arrayhin eli tensoreihin, joihin siten sovellettiin matriisien kerto- ja ratkaisusääntöjä. Muun muassa, 3-ulotteinen array voidaan kertoa kolmella matriisilla, joista kolmas matriisi C on arrayn X takana yhtälössä  $AXB=Y$ . Tuntemattomat X voidaan sovittaa havaintuihin arrayn Y arvoihin pienimpään neliöiden menetelmällä kääntämällä vain kolme pientä matriisia yhden ison sijasta. Esimerkiksi  $100 \times 100 \times 100$  array eli miljoonan tuntemattoman ratkaisu saadaan kääntämällä kolme  $100 \times 100$  matriisia sen sijaan, että yritettäisiin kääntää yksi miljoona  $\times$  miljoona-matriisi. Lineaarinen array-algebra laajensi ”fast transform” ja yleistä estimaatioteoriaa, muun muassa perusmääritelmän harhattomille estimaateille.

Epälineaarinen array-algebra laajensi matriisien ja vektorien kertosäännöt tensorien potenssilaskentaan, jolla moniulotteiset korkeammat derivaatat Taylor-sarjoissa sievistyivät matriisi- ja vektorimuotoon. Tehokkaat uudet merkintätavat pystyivät ilmaisemaan Blahan tensorikäännöksen Taylor-sarjoille siten, että ääretön määrä Taylor-termejä johti suoraan ratkaisuun epälinearisille yhtälöille yhdessä ”hyper”-iteraatiossa. Uusi yleistetty Newton-Gauss, Newton-Raphson ja Blahan ratkaisuteknikka löytyi, jossa kaikki korkeammat derivaatat on otettu huomioon mutta laskemalla ainoastaan epälineaarisen funktion arvot muutamassa välipisteessä ja sen yleinen epälineaarinen käänteisderivaatta. Maanmittareiden käyttämä ehtoyhtälötasoitus ja sen muuntaminen havaintoyhtälöiden malliin tekevät uuden teorian ymmärrettäväksi ”talonpoikaisjärjellä”. ”Vaikkei aina”, sanotaan Pohjanmaalla, ”mutta yhyren kerran kummiskin!”

**Selitys: Urho Rauhala**